CHUYÊN ĐỀ:

BÀI TOÁN THAM SỐ TRONG PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I- LÝ THUYẾT: *Một số dạng toán và phương pháp tương ứng:*

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập D. Giả sử trên D tồn tại $\min\limits_{x\in D} f(x)$; $\max\limits_{x\in D} f(x)$, nếu không ta cần lập bảng biến thiên và đưa ra kết luận.

Dạng 1: Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in D$

Phương pháp: ycbt $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \le m \le \max\limits_{x\in D} f(x)$

Dạng 2: Bất phương trình $f(x) \le m$ có nghiệm $x \in D$

Phương pháp: ycbt $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \le m$

Dạng 3: Bất phương trình $f(x) \le m$ nghiệm đúng $\forall x \in D$

Phương pháp: ycbt $\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{x\in D} f(x)$

Dạng 4: Bất phương trình $f(x) \ge m$ có nghiệm $x \in D$

Phương pháp: ycbt $\Leftrightarrow m \le \max\limits_{x\in D} f(x)$

Dạng 5: Bất phương trình $f(x) \ge m$ nghiệm đúng $\forall x \in D$

Phương pháp: ycbt $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \ge m$

Dạng 6: Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập D

Khi đó: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

*** THUẬT TOÁN:** *Để giải các bài toán tìm giá trị tham số m để phương trình (PT), bất phương trình (BPT) có nghiệm ta có thể thực hiện theo các bước sau:*

Thuật toán 1: **Đối với bài toán không cần đặt ẩn phụ**

Bước 1: Biến đổi đưa PT về dạng $f(x) = g(m)$ $\left(\text{hoặc } f(x) \ge g(m);\ \text{hoặc } f(x) \le g(m)\right)$

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, có tập xác định D_f.

Suy ra: $\min\limits_{x\in D} f(x)$, $\max\limits_{x\in D} f(x)$. *(nếu có)*

Bước 3: Sử dụng các nhận xét và phương pháp đã nêu ở phần trên, đưa ra kết luận.

Thuật toán 2: **Đối với bài toán đặt ẩn phụ**

Bước 1: Đặt ẩn phụ $t = \varphi(x)$. Từ điều kiện ràng buộc của x suy ra ***miền giá trị*** $t = \varphi(x)$.

Giả sử: $\forall x \in D_f \Rightarrow t \in X$.

Bước 1: Lúc này, biến đổi đưa PT về dạng $f(t) = h(m)$,

$\left(\text{hoặc } f(t) \geq h(m); \text{ hoặc } f(t) \leq h(m)\right)$.

Lúc này biện luận điều kiện có nghiệm của PT $f(t) = h(m)$ với $t \in X$.

Các bước còn lại tương tự thuật toán 1.

* Với hệ phương trình có chứa tham số, tư duy, hoặc là dựa vào điều kiện có nghiệm của các dạng hệ đặc thù, hoặc đưa về phương trình chứa 1 ẩn (*có thể là ẩn phụ*) và xét điều kiện có nghiệm trên miền giá trị của ẩn (*hoặc ẩn phụ*) đó.

II- CÁC BÀI TẬP MINH HOẠ:

Bài tập 1: Tìm các giá trị của m để phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ có nghiệm.

Bài giải: Điều kiện: $0 \leq x \leq 9$

Pt $\Leftrightarrow x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m \Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x(9-x)}$ $\left(0 \leq x \leq 9\right)$

* Tìm điều kiện của t:

Cách 1: Theo BDT Cauchy: $t = \sqrt{x(9-x)} \leq \dfrac{x + 9 - x}{2} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq \dfrac{9}{2}$

Cách 2: Ta có $t' = \dfrac{-2x+9}{2\sqrt{-x^2+9x}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{2}$

BBT:

x	$-\infty$	0		$9/2$		9	$+\infty$
t'		‖	$+$	0	$-$	‖	
t		0	$\nearrow$	$9/2$	$\searrow$	0	

Do đó: $0 \leq t \leq 9/2$

* Lúc đó phương trình (*) trở thành: $9 + 2t = t^2 + m \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 9 = m$ (**)

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9$ $\left(0 \leq t \leq 9/2\right)$. Ta có: $f'(t) = -2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Lập bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0		1		$9/2$	$+\infty$
f'(t)			$+$	0	$-$		
f(t)		9	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-9/4$	

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0;9]$ khi chỉ khi PT (**) có nghiệm $t \in \left[0;\, {}^{9}\!/_{2}\right]$

ycbt $\Leftrightarrow\ -{}^{9}\!/_{4} \le m \le 10.$

Bài tập 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$.

Bài giải: Điều kiện: $x \ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$ trên $[0;+\infty)$.

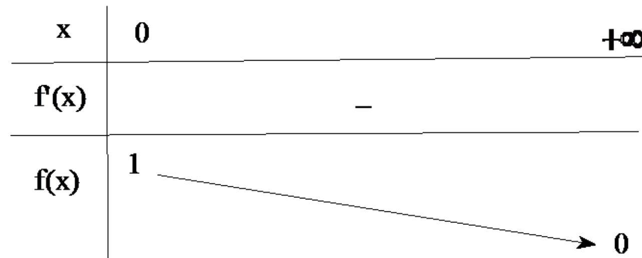
Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{2\left(\sqrt[4]{x^2+1}\right)^3}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}=\left(\sqrt[4]{x^2+1}\right)^3$

$\Leftrightarrow x^6=\left(x^2+1\right)^3 \Leftrightarrow x^2=x^2+1$ (vô nghiệm)

Suy ra, $f'(x)$ không đổi dấu trên $(0;+\infty)$, mà

$f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{8}}-\dfrac{1}{2}<0 \Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0;+\infty)$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

Ta có BBT: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.



Dựa vào BBT ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0<m\le 1$.

Bài tập 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$.

Bài giải:

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ trên $\mathbb{R}$.

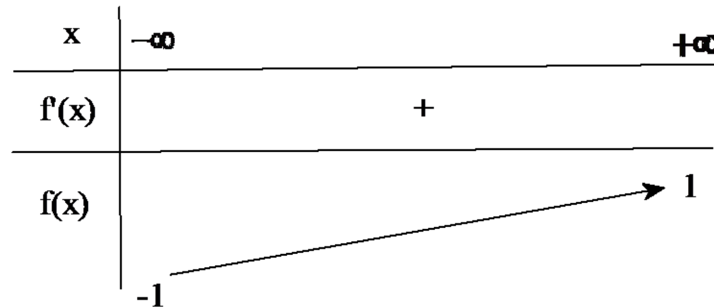
Ta có:

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+1)(2x-1)\ge 0\\ (2x+1)^2\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]=(2x-1)^2\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x+1)(2x-1)\ge 0\\ x=0\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Suy ra, $f'\left(x\right)$ không đổi dấu trên $\left(0;+\infty\right)$, mà $f'\left(0\right)=1>0\Rightarrow f'\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có BBT: $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-1$.



Dựa vào BBT ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0<m\le 1$.

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)$.

Bài giải: Điều kiện: $x\in\left[0;4\right]$.

Phương trình $\Leftrightarrow m=\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}\Leftrightarrow m=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right),\ x\in\left[0;4\right]$

Ta có:

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)+\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{4-x}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}\right),\ x\in\left[0;4\right]$$

Dễ thấy $\sqrt{5-x}>\sqrt{4-x},\ \forall x\in\left(0;4\right)\Rightarrow f'\left(x\right)>0,\ \forall x\in\left(0;4\right)$. Do đó $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;4\right]$. Suy ra phương trình $f\left(x\right)=m$ có nghiệm trên $\left[0;4\right]$

$\Leftrightarrow f\left(0\right)\le m\le f\left(4\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right)\le m\le 12$.

Nhận xét: Ta có thể giải như sau:

Phương trình $\Leftrightarrow m=\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}$. Ta có hàm số $g\left(x\right)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ đồng biến và nhận giá trị dương trên $\left[0;4\right]$, hàm số $h\left(x\right)=\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}$ nghịch biến và nhận giá trị dương trên $\left[0;4\right]$. Suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}$ đồng biến trên $\left[0;4\right]$. Suy ra phương trình $f\left(x\right)=m$ có nghiệm trên $\left[0;4\right]\Leftrightarrow f\left(0\right)\le m\le f\left(4\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right)\le m\le 12$.

Bài tập 4: Tìm m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt: $m\sqrt{x^2+2}=x+m$.

Bài giải: Vì $\sqrt{x^2+2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình

$$\Leftrightarrow m\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)=x\Leftrightarrow m=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}-1}$$ do $\sqrt{x^2+2}-1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1},\ x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

BBT: $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-1$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	+	0	$-$	
f(x)	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x^3-3x+4=m\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1\right)$.

Bài giải: Điều kiện: $x\ge1$.

Phương trình $\Leftrightarrow m=\dfrac{x^3-3x+4}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1}$ do $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1>0,\ \forall x\ge1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-3x+4}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1},\ x\in\left[1;+\infty\right)$.

$$\text{Ta có: } f'\left(x\right)=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1\right)\left(3x^2-3\right)-\left(x^3-3x+4\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1\right)^2}.$$

Với $x>1$ thì $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1>0$, $3x^2-3>0$, $x^3-3x+4>0$ (xét biến thiên) và $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}<0$. Suy ra $f'\left(x\right)>0,\ \forall x>1$. Do đó $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

BBT: $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$.

x	1		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	1	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq 1$.

Bài tập 6: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5} \geq m$.

Bài giải: Điều kiện: $x \in \left[-5;4\right]$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5},\ x \in \left[-5;4\right]$.

Ta có: $f^{/}\left(x\right)=\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+5}}{2\sqrt{4-x}.\sqrt{x+5}}=0$.

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x}=\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-5;4\right) \\ 4-x=x+5 \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

BBT:

x	-5		$-\frac{1}{2}$		4
f'(x)	||	+	0	–	||
f(x)	3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq 3\sqrt{2}$.

Bài tập 7: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $mx-\sqrt{x-3} \leq m+1$.

Bài giải: Điều kiện: $x \geq 3$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow m \leq \dfrac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}$ do $x-1>0,\ \forall x \geq 3$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x-3}+1}{x-1},\ x \in \left[3;+\infty\right)$.

Ta có: $f^{/}\left(x\right)=\dfrac{5-x-\sqrt{x-3}}{2\left(x-1\right)^{2}\sqrt{x-3}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-3=\left(5-x\right)^{2} \end{cases} \Rightarrow x=4$.

BBT: $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)=0$.

x	3		4		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	0

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \le \dfrac{2}{3}$.

<u>Đề 13:</u> (Dự bị- 2004) Chứng minh rằng với mọi $m \ge 0$ thì phương trình sau luôn có nghiệm:

$$x^2 + \left(m^2 - \frac{5}{3}\right)\sqrt{x^2+4} + 2 - m^3 = 0$$

Bài giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2+4} = t \ge 2$.

Phương trình đã cho tương đương với: $t^2 - 4 + \left(m^2 - \dfrac{5}{3}\right)t + 2 - m^3 = 0 \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4 + \left(m^2 - \dfrac{5}{3}\right)t + 2 - m^3$, ta có $f(t)$ liên tục trên $[2;+\infty)$ và

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Ta sẽ chứng minh $f(2) \le 0,\ \forall m \ge 0$. Thật vậy: $f(2) = -m^3 + 2m^2 - \dfrac{4}{3}$.

Xét hàm số $g(m) = -m^3 + 2m^2 - \dfrac{4}{3},\ m \ge 0$. Ta có: $g'(m) = -3m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

BBT:

m	0		$\frac{4}{3}$		+∞
g'(m)		+	0	−	
g(m)	$-\frac{4}{3}$	↗	$-\frac{4}{27}$	↘	−∞

Dựa vào BBT, ta suy ra $f(2) = g(m) < 0,\ \forall m \ge 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+3)(6-x)} = m$.

Bài giải: Điều kiện: $x \in [-3;6]$.

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}\Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(x+3)(6-x)}$.

Ta có: $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}=\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{6-x}\sqrt{x+3}}=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{6-x}=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-3;6)\\6-x=x+3\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra: $\max\limits_{[-3;6]}t=t\left(\dfrac{3}{2}\right)=3\sqrt{2},\ \min\limits_{[-3;6]}t=t(-3)=t(6)=3$ hay $\forall x\in[-3;6]\Rightarrow t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Lúc đó phương trình trở thành: $t-\dfrac{t^2-9}{2}=m\Leftrightarrow t^2-2t=9-2m$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t,\ t\in[3;3\sqrt{2}]$. Ta có: $f'(t)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1\notin(3;3\sqrt{2})$.

BBT:

t	3		$3\sqrt{2}$
f'(t)		+	
f(t)	3	↗	18-6$\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(3)\le 9-2m\le f(3\sqrt{2})\Leftrightarrow\dfrac{6\sqrt{2}-9}{2}\le m\le 3$.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$2\sqrt{-x^2-2x+3}-(m-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}\right)+m+1=0.$$

Bài giải: Điều kiện: $x\in[-3;1]$.

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=4+2\sqrt{(x+3)(1-x)}$.

Ta có: $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x+3}}=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-3;1)\\1-x=x+3\end{cases}\Rightarrow x=-1$.

Suy ra: $\max\limits_{[-3;1]}t=t(-1)=2\sqrt{2},\ \min\limits_{[-3;1]}t=t(-3)=t(1)=2$ hay $\forall x\in[-3;1]\Rightarrow t\in[2;2\sqrt{2}]$.

Hoặc: Do $t^2 = 4 + 2\sqrt{(x+3)(1-x)} \ge 4 \Rightarrow t \ge 2$

và $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} \le \sqrt{2}\sqrt{(x+3)+(1-x)} = 2\sqrt{2} \Rightarrow t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Lúc đó phương trình trở thành: $t^2 - (m-1)t + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+t-3}{t-1}$

do $t - 1 > 0,\ \forall t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+t-3}{t-1},\ t \in \left[2;2\sqrt{2}\right]$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{t^2-2t+2}{(t-1)^2} > 0,\ \forall t \in \left(2;2\sqrt{2}\right)$.

BBT:

t	2		$2\sqrt{2}$
f'(t)	‖	+	‖
f(t)	3	↗	$\dfrac{12\sqrt{2}+13}{7}$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3 \le m \le \dfrac{12\sqrt{2}+13}{7}$.

<u>Bài tập 3:</u> (CĐ 2011) Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$6 + x + 2\sqrt{(4-x)(2x-2)} = m + 4\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}\right).$$

Bài giải: Điều kiện: $x \in [1;4]$.

Đặt $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2} \Rightarrow t^2 = 2 + x + 2\sqrt{(4-x)(2x-2)}$.

Ta có: $t' = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-2}} = \dfrac{2\sqrt{4-x} - \sqrt{2x-2}}{\sqrt{4-x}.\sqrt{2x-2}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = \sqrt{2x-2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;4) \\ 4(4-x) = 2x-2 \end{cases} \Rightarrow x = 3$.

Suy ra: $\max\limits_{[1;4]} t = t(3) = 3,\ \min\limits_{[1;4]} t = t(1) = \sqrt{3}$ hay $\forall x \in [1;4] \Rightarrow t \in \left[\sqrt{3};3\right]$.

Lúc đó phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 4 = m$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t + 4,\ t \in \left[\sqrt{3};3\right]$. Ta có: $f'(t) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in \left(2;2\sqrt{2}\right)$.

BBT:

t	$\sqrt{3}$		2		3
f'(t)	‖	–	0	+	‖
f(t)	$7-4\sqrt{3}$	↘	0	↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 \le m \le 1$.

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^2+7+m\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^4+x^2+1}+m\left(\sqrt{x^2-x+1}-2\right).$$

Bài giải: Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}+m\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}+2\right)+7=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} \Rightarrow t' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$.

Ta có: $t'=0 \Leftrightarrow \left(2x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}=\left(2x-1\right)\sqrt{x^2+x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2x+1\right)\left(2x-1\right)\ge 0\\ \left(2x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)=\left(2x-1\right)^2\left(x^2+x+1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2x+1\right)\left(2x-1\right)\ge 0\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(2x+1\right)\left(2x-1\right)\ge 0\\ x=0\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Suy ra $t'\left(x\right)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$, mà $t'\left(0\right)=1>0$ suy ra $t'\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ vậy $t\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} t\left(x\right)=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} t\left(x\right)=-1$. Vậy $t\in\left(-1;1\right)$.

Lúc đó: $t^2=2x^2+2-2\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$ nên phương trình trở thành:

$\dfrac{t^2-2}{2}+m\left(t+2\right)+7=0 \Leftrightarrow -2m=\dfrac{t^2+12}{t+2}$ do $t+2>0,\ \forall t\in\left(-1;1\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+12}{t+2},\ t\in\left(-1;1\right)$. Ta có: $f'\left(t\right)=\dfrac{t^2+4t-12}{\left(t+2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-6\end{array}\right.$.

BBT:

t	-1		1
f'(t)	‖	–	‖
f(t)	13	↘	$\frac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{13}{3} < -2m < 13 \Leftrightarrow -\frac{13}{2} < m < -\frac{13}{6}$.

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x-2} - 2\sqrt[4]{x^2-2x} + m\sqrt{x} = 0$.

Bài giải: Điều kiện: $x \ge 2$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}} + m = 0$ (do $x \ge 2$)

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}$, khi đó $0 \le t = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x}} = \sqrt[4]{1-\frac{2}{x}} < 1,\ \forall x \ge 1$ (hoặc khảo sát $u(x) = \frac{x-2}{x}$)

Phương trình trở thành: $t^2 - 2t + m = 0 \Leftrightarrow -m = t^2 - 2t,\ t \in [0;1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t,\ t \in [0;1) \Rightarrow f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \notin [0;1)$.

BBT:

t	0		1
f'(t)	‖	–	‖
f(t)	0	↘	-1

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < -m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m < 1$.

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$m\left(\sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{x^2-4}\right) - \sqrt{x+2} = 2\sqrt[4]{x^2-4}.$$

Bài giải: Điều kiện: $x \ge 2$.

+ Ta thấy $x = 2$ không phải là nghiệm của phương trình.

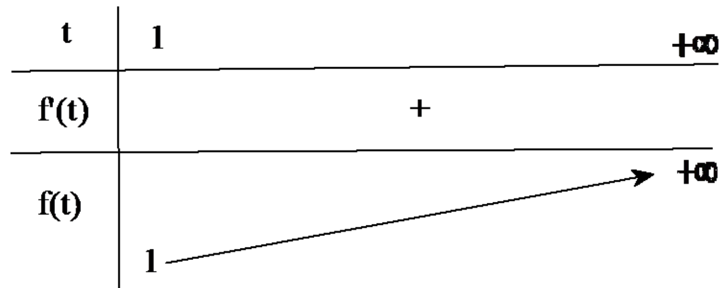
+ Xét $x > 2$, phương trình $\Leftrightarrow m\left(\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}} + 2\right) - \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}} = 2$ (do $x \ge 2$)

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$, khi đó $\dfrac{x+2}{x-2}=1+\dfrac{4}{x-2}>1,\ \forall x>2\Rightarrow t>1$ (hoặc khảo sát $u\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x-2}$)

Phương trình trở thành: $m\left(\dfrac{1}{t}+2\right)-t=2\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+2t}{2t+1},\ t\in\left(1;+\infty\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t}{2t+1},\ t\in\left(1;+\infty\right)\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{2t^2+2t+2}{\left(2t+1\right)^2}>0,\ \forall t\in\left(1;+\infty\right)$.

BBT: $\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(t\right)=+\infty$.



Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1<-m\le 0\Leftrightarrow 0\le m<1$.

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $5x^2+6x+7=m\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2}$.

Bài giải: Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Để ý rằng $5x^2+6x+7=3\left(x+1\right)^2+2\left(x^2+2\right)$.

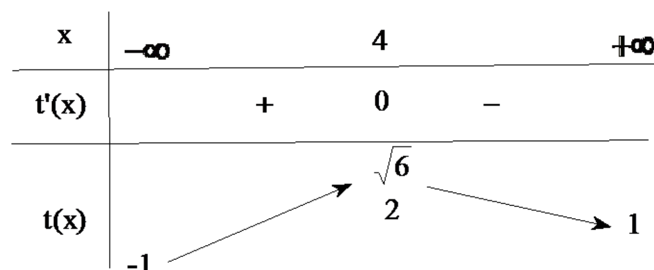
Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2+3\left(x+1\right)^2=m\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2}$ (*)

Do $x=-1$ không là nghiệm của phương trình (*), nên (*) tương đương:

$\Leftrightarrow 2\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}+3.\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}=m$

Đặt $t=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$, khi đó $t'=\dfrac{2-x}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}=0\Leftrightarrow x=2$.

BBT: $\lim\limits_{x\to+\infty}t\left(x\right)=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty}t\left(x\right)=-1$.



Vậy $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in \left(-1;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

Phương trình trở thành: $\dfrac{2}{t}+3t=m,\ t\in\left(-1;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{2}{t}+3t,\ t\in\left(-1;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right] \Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{3t^2-2}{t^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ t=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\end{array}\right.$.

BBT: $\lim\limits_{t\to 0^-} f\left(t\right)=-\infty;\ \lim\limits_{t\to 0^+} f\left(t\right)=+\infty$.

t	-1		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{2}$
f'(t)		+	0	–	||	–	0	+	
f(t)	-5	↗	$-2\sqrt{6}$	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	$2\sqrt{6}$	↗	$\frac{13}{\sqrt{6}}$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-2\sqrt{6}\right] \cup \left[2\sqrt{6};+\infty\right)$.

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x\left(x-1\right)}\right)=1.$$

Bài giải: Điều kiện: $x>1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x\left(x-1\right)}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)}=1$

$\Leftrightarrow m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x\left(x-1\right)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x\left(x-1\right)}=\left(1-m\right)\sqrt{x} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}=1-m$.

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}$, khi đó $t\in\left(0;1\right)$.

Phương trình trở thành: $\frac{1}{t^2}+t=1-m \Leftrightarrow m=-\frac{1}{t^2}-t+1,\ t\in(0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{t^2}-t+1,\ t\in(0;1)\Rightarrow f'(t)=\frac{2}{t^2}-1>0,\ \forall t\in(0;1)$.

BBT: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=+\infty$.

t	0		1
f'(t)	||	+	
f(t)	|| $-\infty$	↗	-1

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m<-1$.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\frac{\left(x+2-\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x^2+1}+\frac{18\sqrt{x^2+1}}{x+2+\sqrt{x^2+1}}=m$.

Bài giải: Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)^2+\frac{18}{\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}+1}=m$ (*)

Đặt $t=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$, khi đó $t'=\frac{1-2x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

BBT: $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x)=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} t(x)=-1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
t'(x)		+	0	−	
t(x)	-1	↗	$\sqrt{5}$	↘	1

Vậy $x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in\left(-1;\sqrt{5}\right]$.

Phương trình trở thành: $(t-1)^2+\frac{18}{t+1}=m,\ t\in\left(-1;\sqrt{5}\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\left(t-1\right)^2+\dfrac{18}{t+1}$, $t\in\left(-1;\sqrt{5}\right]\Rightarrow f'\left(t\right)=2\left(t-1\right)-\dfrac{18}{\left(t+1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=2$.

BBT: $\lim\limits_{t\to-1^+}f\left(t\right)=+\infty$.

t	-1		0		$\sqrt{5}$
f'(t)	||	–	0		||
f(t)	|| $+\infty$	↘	7	↗	$\dfrac{3+5\sqrt{5}}{2}$ ||

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge 7$.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\tan^2 x+\cot^2 x+m\left(\tan x+\cot x\right)+3=0$.

Bài giải: Điều kiện: $x\ne k\dfrac{\pi}{2}$.

Đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow\left|t\right|=\left|\tan x+\dfrac{1}{\tan x}\right|=\left|\tan x\right|+\left|\dfrac{1}{\tan x}\right|\ge 2$

suy ra: $t^2=2+\tan^2 x+\cot^2 x$.

Phương trình trở thành: $t^2+mt+1=0\Leftrightarrow -m=\dfrac{t^2+1}{t}$, $\left|t\right|\ge 2$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+1}{t}$, $\left|t\right|\ge 2\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{t^2-1}{t^2}>0,\ \forall\left|t\right|\ge 2$.

BBT: $\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(t\right)=+\infty$; $\lim\limits_{t\to-\infty}f\left(t\right)=-\infty$.

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(t)		+	||||	||||	||||	+	
f(t)	$-\infty$	↗	$-\dfrac{5}{2}$ ||	||||	|| $\dfrac{5}{2}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\le-\dfrac{5}{2}$ hoặc $m\ge\dfrac{5}{2}$.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình $3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right)$ (1) có

nghiệm duy nhất $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài giải: Xét $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, khi đó $\sin x > 0,\ \cos x > 0,\ \tan x > 0$ và $\sin x + 3\cos x > 0$.

PT (1) $\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1}\,\dfrac{(\sin x + 2\cos x)}{(\sin x + 3\cos x)} = m \Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1}\,\dfrac{\tan x + 2}{\tan x + 3} = m$ (2)

Đặt $t = \tan x$ $\left(t > 0\ \forall x \in \left(0;\pi/2\right)\right)$. Lúc đó, PT (2) trở thành: $3\sqrt{t+1}\,\dfrac{t+2}{t+3} = m$ (3)

Xét hàm số $f(t) = 3\sqrt{t+1}\,\dfrac{t+2}{t+3}$ $(t > 0)$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{3}{2\sqrt{t+1}}.\dfrac{t+2}{t+3} + \dfrac{3\sqrt{t+1}}{(t+3)^2} > 0,\ \forall t > 0$

Lập bảng biến thiên: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

t	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(t)$	(gạch chéo) |	+
$f(t)$	(gạch chéo) | 2	↗ $+\infty$

Ta có, ứng với mỗi $t > 0$ thoả mãn PT (3), ta được đúng một nghiệm $x \in \left(0;\pi/2\right)$. Do đó, PT (1) có nghiệm duy nhất $x \in \left(0;\pi/2\right)$ khi và chỉ khi PT (3) có nghiệm duy nhất $t > 0$. Dựa vào BBT, suy ra ycbt là $m > 2$.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 - mx^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0 \ (1)$$

Bài giải:

+ Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

+ Với $x \neq 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) + 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - m = 0$ (2)

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow |t| = \left|x + \dfrac{1}{x}\right| = |x| + \left|\dfrac{1}{x}\right| \geq 2 \Rightarrow |t| \geq 2$.

Phương trình (2) trở thành: $t(t^2 - 3) + 2(t^2 - 2) - 3t - m = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - 6t - 4 - m = 0$ (3)

Từ phép đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, ta có với mỗi $t = \pm 2$ cho ta 1 giá trị của x; với mỗi t thoả mãn $\left|t\right| > 2$ cho ta 2 giá trị x. Do đó, (1) có đúng hai nghiệm phân biệt$\Leftrightarrow$ (3) chỉ có các nghiệm $t_1 = 2$ và $t_2 = -2$, hoặc (3) có đúng 1 nghiệm t thoả mãn $\left|t\right| > 2$. Ta xét hai trường hợp:

<u>TH 1:</u> (3) có đúng hai nghiệm $t_1 = 2$ và $t_2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - m = 0 \\ m = 0 \end{cases}$ không tồn tại m.

<u>TH 2:</u> (3) có đúng một nghiệm t và thoả mãn $\left|t\right| > 2$.

Ta có (3)$\Leftrightarrow m = t^3 + 2t^2 - 6t - 4$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^3 + 2t^2 - 6t - 4,\ \left|t\right| > 2 \Rightarrow f'\left(t\right) = 3t^2 + 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-2+\sqrt{22}}{3} \\ t = \dfrac{-2-\sqrt{22}}{3} \end{array}\right.$.

BBT: $\lim\limits_{t \to +\infty} f\left(t\right) = +\infty;\ \lim\limits_{t \to -\infty} f\left(t\right) = -\infty$.

t	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{22}}{3}$		-2		2		$+\infty$
f'(t)		+	0	–		//////		+	
f(t)	$-\infty$	↗		↘		//////		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > f\left(\dfrac{-2-\sqrt{22}}{3}\right) \\ m < f\left(2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{16+44\sqrt{22}}{27} \\ m < 0 \end{array}\right.$.

<u>Bài tập 3:</u> (ĐH A - 2002) Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$:

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0.$$

Bài giải: Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \Rightarrow \forall x \in \left[1;3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow 0 \le \log_3 x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \le \log_3^2 x \le 3$

$\Leftrightarrow 1 \le \log_3^2 x + 1 \le 4 \Rightarrow t \in \left[1;2\right]$.

Phương trình trở thành: $t^2 + t - 2 = 2m \Leftrightarrow 2m = t^2 + t - 2,\ t \in \left[1;2\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^2 + t - 2,\ t \in \left[1;2\right] \Rightarrow f'\left(t\right) = 2t + 1 > 0,\ \forall t \in \left[1;2\right]$.

BBT:

t	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(t)$	//////			+			//////
$f(t)$	//////	0	↗	4	//////

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc $[0;1]$:

$$4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)\left(2^{2+x} - 2^{2-x}\right) + 2m.$$

Bài giải: Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 4\left(4^x + 4^{-x}\right) = 4(m+1)\left(2^x - 2^{-x}\right) + 2m$

Đặt $t = 2^x - 2^{-x},\ x \in [0;1] \Rightarrow t'(x) = \left(2^x + 2^{-x}\right)\ln 2 > 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[0;1]} t(x) = t(0) = 0 \\ \max\limits_{[0;1]} t(x) = t(1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \forall x \in [0;1] : t \in \left[0;\dfrac{3}{2}\right]$

Phương trình trở thành: $2\left(t^2 + 2\right) = 2(m+1)t + m \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} = \dfrac{t^2 - t + 2}{2t+1},\ t \in \left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 2}{2t+1},\ t \in \left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

$\Rightarrow f'(t) = \dfrac{2t^2 + 2t - 5}{(2t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1+\sqrt{11}}{2} \\ t = \dfrac{-1-\sqrt{11}}{2} \notin \left(0;\dfrac{3}{2}\right) \end{array}\right.$

BBT:

t	0		$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$			−	0	+		
$f(t)$	2	↘	$\frac{-2+\sqrt{11}}{2}$	↗	$\frac{11}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{-2+\sqrt{11}}{2} \le \frac{m}{2} \le 2 \Leftrightarrow -2+\sqrt{11} \le m \le 4$.

Bài tập 3: Cho phương trình: $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m\left(\log_2 x - 3\right)$ (1)

Tìm các giá trị của m để có phương trình nghiệm $x \in \left[32;+\infty\right)$.

Bài giải: Từ điều kiện bài ra, ta thấy $\log_2 x \ge 5,$ suy ra $\left(\log_2 x - 3\right) \ge 2$ nên $m \ge 0$.

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m\left(\log_2 x - 3\right)$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = m^2\left(\log_2 x - 3\right)^2$ (2)

Đặt $t = \log_2 x \quad \left(t \ge 5\right)$. PT (2) trở thành: $t^2 - 2t - 3 = m^2\left(t-3\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{t+1}{t-3}$ (3)

Xét hàm số $f\left(t\right) = \frac{t+1}{t-3} \quad \left(t \ge 5\right)$. Ta có: $f'\left(t\right) = \frac{-4}{\left(t-3\right)^2} < 0\ \forall t \ge 5$

Lập bảng biến thiên:

t	$-\infty$	5		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	
$f(t)$		3	$\searrow$	1

Lúc đó, phương trình (1) có nghiệm $x \in \left[32;+\infty\right]$ khi chỉ khi PT (3) có nghiệm $t \in \left[5;+\infty\right)$

ycbt $\Leftrightarrow$ $1 \le m^2 \le 3$. Kết hợp $m \ge 0,$ suy ra: $1 \le m \le \sqrt{3}$.

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\left(4m-3\right)\sqrt{x+3} + \left(3m-4\right)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0 \text{ (1)}$$

Bài giải: Điều kiện: $x \in \left[-3;1\right]$.

(1) $\Leftrightarrow m\left(4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1\right) = 3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$

Vì $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4$ nên ta có thể đặt $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\sin\alpha \\ \sqrt{1-x} = 2\cos\alpha \end{cases}, \ \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó ta có phương trình: $m = \frac{6\sin\alpha + 8\cos\alpha + 1}{8\sin\alpha + 6\cos\alpha + 1}$ (2). Đặt $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, khi đó $t \in \left[0;1\right]$

và $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, (2) trở thành: $m = \frac{7t^2 - 12t - 9}{5t^2 - 16t - 7}$, $t \in \left[0;1\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7},\ t\in\left[0;1\right]\Rightarrow f^{/}\left(t\right)=-\dfrac{52t^2+8t+60}{\left(5t^2-16t-7\right)^2}<0,\ \forall t\in\left[0;1\right]$.

Do đó, $f\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left[0;1\right]$.

BBT:

t	0		1
f'(t)	‖	–	‖
f(t)	$\frac{9}{7}$	↘	$\frac{7}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{7}{9}\le m\le\dfrac{9}{7}$.

Nhận xét: *Hoàn toàn ta có thể khảo sát trực tiếp hàm số* $g\left(x\right)=\dfrac{3\sqrt{x+3}+4\sqrt{1-x}+1}{4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1}$ *trên* $\left[-3;1\right]$ *để tìm điều kiện có nghiệm của phương trình.*

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$m2^{\sqrt[3]{x^2}}+\left(2m-1\right)\left(3-\sqrt{5}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}+\left(3+\sqrt{5}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}=0\ (1)$$

Bài giải: Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow 2m+\left(2m-1\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}+\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}=0$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow t\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình trở thành: $2m+\left(2m-1\right)\dfrac{1}{t}+t=0\Leftrightarrow -2m=\dfrac{t^2-1}{t+2},\ t\ge 1$.

Với $t\ge 1: t=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log^3_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}t}$. Do đó với $t=1$ ta có duy nhất $x=0$, với $t>1$ thì ta có 2 giá trị x.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2-1}{t+2},\ t\ge 1\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{t^2+4t+1}{\left(t+2\right)^2}>0,\ \forall t\ge 1$.

BBT:

	1		$+\infty$
f'(t)		+	
f(t)	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2m>0\Leftrightarrow m<0$.

Bài tập 3: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thoả mãn $\left|x\right|\ge \dfrac{1}{2}$:

$$9^{2x^2-x}-2\left(m-1\right)6^{2x^2-x}+\left(m+1\right)4^{2x^2-x}\ge 0.$$

Bài giải: Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Chia 2 vế của bất phương trình cho 4^{2x^2-x}, ta được: $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{2x^2-x}-2\left(m-1\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2-x}+m+1\ge 0$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2-x}$. Ta có: $\left|x\right|\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2x^2-x\ge 0\Rightarrow t\ge 1$.

Bất phương trình trở thành: $t^2-2\left(m-1\right)t+m+1\le 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{t^2+2t+1}{2t-1},\ t\in\left[1;+\infty\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t+1}{2t-1},\ t\in\left[1;+\infty\right)\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{2t^2-2t-4}{\left(2t-1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=2\in\left[1;+\infty\right)$.

BBT: $\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(t\right)=+\infty$.

t	1		2		$+\infty$
f'(t)		−	0	+	
f(t)	4	↘	3	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\le 3$.

Bài tập 3: **(Cao Đẳng - 2013)** Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\left(x-2-m\right)\sqrt{x-1}\le m-4.$$

Bài giải: Điều kiện: $x \ge 1$.

Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow \forall x \ge 1 \Rightarrow t \ge 0$

Bất phương trình trở thành: $\left(t^2 - 1 - m\right)t \le m - 4 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{t^3 - t + 4}{t+1},\ t \ge 0.$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{t^3 - t + 4}{t+1},\ t \ge 0 \Rightarrow f'\left(t\right) = \dfrac{\left(t-1\right)\left(2t^2 + 5t + 5\right)}{\left(t+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in \left[0; +\infty\right).$

BBT:

t	0		1		$+\infty$
f'(t)	|	−	0	+	
f(t)	4	↘	2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge 2$.

<u>Bài tập 3:</u> Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-1;1\right]$

$$m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \ge 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15.$$

Bài giải: Điều kiện: $x \in \left[-1;1\right]$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow m\left(\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x}\right) \ge 16x - 12\sqrt{1-x^2} + 2m + 15$.

$\Leftrightarrow 2\left[9\left(1+x\right) - 6\sqrt{\left(1-x\right)\left(1+x\right)} + \left(1-x\right)\right] + m\left(3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + 2\right) - 5 \le 0$

Đặt $t = 3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \Rightarrow t'\left(x\right) = \dfrac{3}{2\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0,\ \forall x \in \left(-1;1\right)$

suy ra $\min\limits_{x\in[-1;1]} t\left(x\right) = t\left(-1\right) = -\sqrt{2};\ \max\limits_{x\in[-1;1]} t\left(x\right) = t\left(1\right) = 3\sqrt{2} \Rightarrow \forall x \in \left[-1;1\right] \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$

Bất phương trình trở thành: $2t^2 + m\left(t+2\right) - 5 \le 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{-2t^2 + 5}{t+2},\ t \in \left[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{-2t^2 + 5}{t+2},\ t \in \left[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right] \Rightarrow f'\left(t\right) = \dfrac{-2t^2 - 8t - 5}{\left(t+2\right)^2} < 0,\ \forall t \in \left[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$.

BBT:

t	$-\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$
f'(t)		−	
f(t)	$\frac{3}{\sqrt{2}+2}$	↘	$\frac{-31}{3\sqrt{2}+2}$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \le \min\limits_{t\in\left[-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]} f\left(t\right) = f\left(3\sqrt{2}\right) = \dfrac{-31}{3\sqrt{2}+2}$.

Bài tập 3: Tìm m để bất phương trình: $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ (1) có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

Bài giải: Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ $\left(x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]\right)$. Ta có $t' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0		1		$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
f/(t)			−	0	+		
f(t)		$\sqrt{2}$	↘	1	↗	2	

Từ đó: $1\le t\le 2$.

Với $1\le t\le 2$, ta biến đổi: $t=\sqrt{x^2-2x+2} \Leftrightarrow t^2 = x^2-2x+2 \Leftrightarrow -x(2-x) = t^2-2$.

BPT (1) trở thành: $m(t+1)\le t^2-2 \Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2-2}{t+1}$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ $\left(1\le t\le 2\right)$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in\left[1;2\right]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[1;2\right]$.

Xét bảng biến thiên:

t	$-\infty$	1		2	$+\infty$
f/(t)			+		
f(t)		$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{2}{3}$	

Lúc đó, BPT (1) có nghiệm $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$ khi chỉ khi BPT (2) có nghiệm $t \in \left[1;2\right]$.

Điều này xãy ra khi $m \le \max_{t\in[1;2]} = f(2) = 2/3$.

Nhận xét: Nếu đề bài yêu cầu tìm m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng $\forall x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$

thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \le f\left(1\right) = -\frac{1}{2}$.

<u>Bài tập 1:</u> Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=m \end{cases}$.

Bài giải: Điều kiện $x \ge 1;\ y \ge \frac{1}{2}$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2\sqrt{y} \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y & (1) \\ \sqrt{4y-1}-\sqrt{2y-1}=m & (2) \end{cases}$

(do $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0,\ \forall x \ge 1;\ y \ge \frac{1}{2}$)

Từ (1) ta thấy với mỗi $y \ge \frac{1}{2}$ sẽ cho ta một $x \ge 1$. Vì vậy hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $y \ge \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f\left(y\right)=\sqrt{4y-1}-\sqrt{2y-1},\ y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(y\right)=\frac{2}{\sqrt{4y-1}}-\frac{1}{\sqrt{2y-1}}=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4} \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

BBT: $\lim_{y\to+\infty} f\left(y\right)=+\infty$.

y	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
f'(y)	||	–	0	+	
f(y)	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>Bài tập 1:</u> Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x - y + m = 0 & (1) \\ y + \sqrt{xy} = 2 & (2) \end{cases}$.

Bài giải: Điều kiện $xy \ge 0$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \sqrt{xy} = 2 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 2 \\ x = \dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} \end{cases}$ (do $y = 0$ không thoả mãn phương trình)

Thay vào phương trình (1) ta được: $\frac{y^2 - 4y + 4}{y} - y + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4y - 4}{y},\ y \le 2$.

Xét hàm số $f\left(y\right) = \frac{4y - 4}{y},\ y \in \left(-\infty; 2\right]$.

Ta có: $f'\left(y\right) = \frac{4}{y^2} > 0,\ \forall y \in \left(-\infty; 2\right] \setminus \left\{0\right\}$.

BBT: $\lim\limits_{y \to -\infty} f\left(y\right) = 4;\ \lim\limits_{y \to 0^+} f\left(y\right) = -\infty;\ \lim\limits_{y \to 0^-} f\left(y\right) = +\infty$.

y	$-\infty$		0		2
f'(y)		+	||	+	
f(y)	4 ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > 4$ hoặc $m \le 2$.

<u>Bài tập 1:</u> Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt: $\begin{cases} 3\left(x+1\right)^2 + y - m = 0 & (1) \\ x + \sqrt{xy} = 1 & (2) \end{cases}$.

Bài giải: Điều kiện $xy \ge 0$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \sqrt{xy} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \end{cases}$ (do $x = 0$ không thoả mãn phương trình)

Thay vào phương trình (1) ta được: $3x^2 + 6x + \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = m - 3$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=3x^2+6x+\dfrac{x^2-2x+1}{x},\ x\in\left(-\infty;1\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{6x^3+7x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=-\dfrac{1}{2}\vee x=\dfrac{1}{3}$.

BBT: $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=-\infty$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		1
f'(x)		$-$	0	+	0	$-$	||	$-$	0	+	||
f(x)	$+\infty$ ↘		-7	↗	$-\frac{27}{4}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{11}{3}$	↗	9

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{11}{3}\le m-3\le 9\\ -7\le m-3\le-\dfrac{27}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{20}{3}\le m\le 12\\ -4\le m\le-\dfrac{15}{4}\end{array}\right.$.

<u>Bài tập 1:</u> Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y-3}=a\ (1)\\ x+y=2\left(a+1\right)\qquad(2)\end{cases}$.

Bài giải: Điều kiện $x\ge-1;\ y\ge3$..

Đặt $u=\sqrt{x+1}\ge0;\ v=-\sqrt{y-3}\le0$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases}u+v=a\\ u^2+v^2=2\left(a+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=a\\ uv=\dfrac{a^2-2a}{2}\end{cases}$, suy ra $u,\ v$ là nghiệm của phương trình: $f\left(t\right)=t^2-at+\dfrac{a^2-2a}{2}=0$.

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow f\left(t\right)=0$ có nghiệm $t_1,\ t_2$ thoả mãn:

$t_1\le0\le t_2\Leftrightarrow 1.f\left(0\right)\le0\Leftrightarrow\dfrac{a^2-2a}{2}\le0\Leftrightarrow a\in\left[0;2\right]$.

<u>Bài tập 1:</u> Tìm *m* để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10\end{cases}$

Bài giải: Đặt $u = x + \frac{1}{x};\ v = y + \frac{1}{y}$ ta có $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = u - 3u$

$$\text{và } |u| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x|.\left|\frac{1}{x}\right|} = 2\ ;\quad |v| = |y| + \left|\frac{1}{y}\right| \geq 2\sqrt{|y|.\left|\frac{1}{y}\right|} = 2$$

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 + v^3 - 3(u + v) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 8 - m \end{cases}$

$\Leftrightarrow u, v$ là nghiệm của phương trình bậc hai $f(t) = t^2 - 5t + 8 = m$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t) = m$ có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn $|t_1| \geq 2;\ |t_2| \geq 2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ với $|t| \geq 2$

t	$-\infty$		-2		2		$5/2$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	║	║		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	2 ║	║	2	↘	$7/4$	↗	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta có hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \vee$ m ≥ 22

<u>Bài tập 1:</u> Tìm *m* để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ (I)

Bài giải: Điều kiện: $x \geq 0,\ y \geq 0$.

Đặt $u = \sqrt{x},\ v = \sqrt{y}\ \ (u \geq 0,\ v \geq 0)$

Hệ (I) trở thành: $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ (u + v)(u^2 - uv + v^2) = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ (u^2 - uv + v^2) = 1 - 3m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ (u + v)^2 - 3uv = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ 1 - 3uv = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = m \end{cases} \text{(II)}$$

Lúc đó: $u,\ v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - X + m = 0$ (*)

Hệ đã cho có nghiệm $(x; y) \Leftrightarrow$ Hệ (II) có nghiệm $u \geq 0,\ v \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm $X \geq 0$.

<u>CáCách 1:</u> Sử dụng Hệ thức Viet: ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 \leq m \leq {}^{1}\!/_{4}$.

<u>Cách 2:</u> Phương trình (*) $\Leftrightarrow\ X - X^2 = m$

Xét hàm số $f(X) = X - X^2 \quad \left(X \geq 0\right)$. Ta có: $f^/(X) = 1 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$.

Ta xét bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f/(X)	//////		+	0	−	
f(X)	//////	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: ycbt $\Leftrightarrow \ 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$.

<u>Bài tập 1:</u> Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = 4 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 10m+6 \end{cases}$.

Bài giải: Điều kiện $xy \neq 0$.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 10m + 6 \end{cases}$ (1). Đặt $a = x + \dfrac{1}{x};\ b = y + \dfrac{1}{y} \Rightarrow \left|a\right| \geq 2;\ \left|b\right| \geq 2$.

Hệ (1) trở thành: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 - 2 + b^2 - 2 = 10m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ \left(a+b\right)^2 - 2ab = 10m + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 3 - 5m \end{cases}$

Suy ra $a,\ b$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 4t + 3 - 5m = 0 \Leftrightarrow 5m = t^2 - 4t + 3,\ \left|t\right| \geq 2$ (2)

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm thoả mãn $\left|t\right| \geq 2$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^2 - 4t + 3,\ \left|t\right| \geq 2$. Ta có: $f^/\left(t\right) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

BBT: $\lim\limits_{t \to -\infty} f\left(t\right) = +\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f\left(t\right) = +\infty.$

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(t)		−		//////	0	+	
f(t)	$+\infty$	↘	15	//////	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3m \geq 15 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Bài tập 1: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 3\left(x^2+y^2\right)-2xy-2\left(x+y\right)=15 \\ x^2+y^2=m \end{cases}$.

Bài giải:

Đặt $S=x+y,\ P=xy$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} 3S^2-2S-8P-15=0 \\ 4S^2-8P=4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3S^2-2S-8P-15=0 & (1) \\ 4S^2+2S+15=4m & (2) \end{cases} \text{(I)}$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (I) có nghiệm $S,\ P$ thoả mãn: $S^2 \ge 4P$.

Từ (1) ta có: $3S^2-2S-15=8P \le 2S^2 \Leftrightarrow S^2-2S-15 \le 0 \Leftrightarrow S \in \left[-3;5\right]$.

Do đó, hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $S \in \left[-3;5\right]$.

Xét hàm số $f\left(S\right)=4S^2+2S+15,\ S \in \left[-3;5\right]$. Ta có: $f'\left(S\right)=2S-2=0 \Leftrightarrow S=1$.

BBT: $\lim\limits_{S\to-\infty} f\left(S\right)=+\infty;\ \lim\limits_{S\to+\infty} f\left(S\right)=+\infty.$

S	-3		-1		5
f'(S)	‖	−	0	+	‖
f(S)	18	↘	14	↗	50

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 14 \le 4m \le 50 \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} \le m \le \dfrac{25}{2}$.

Bài tập 2: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\left(x;y\right)$ với $x>0,\ y>0$:

$$\begin{cases} xy\left(x+y\right)=3\left(x+y\right)+xy \\ x^2+y^2+3xy-\left(m-5\right)\left(x+y\right)-xy\left(x+y\right)+m+33=0 \end{cases}.$$

Bài giải:

Đặt $S=x+y,\ P=xy$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} SP=3S+P & (1) \\ S^2+P-\left(m-5\right)S-SP+m+33=0 & (2) \end{cases} \text{(I)}$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (I) có nghiệm $S,\ P$ thoả mãn: $S>0,\ P>0$ và $S^2 \ge 4P$.

Từ (1) ta có: $3S^2-2S-15=8P \le 2S^2 \Leftrightarrow S^2-2S-15 \le 0 \Leftrightarrow S \in \left[-3;5\right]$.

+ Ta thấy $S=1$ không thoả mãn (1).

+ Với $S \neq 1$, từ (1) ta có: $\frac{3S}{S-1} = P \leq \frac{S^2}{4} \Rightarrow \frac{S^3 - 4S^2 - 12S}{4(S-1)} \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq S < 1 \\ S \geq 4 \end{array}\right.$ (*)

Mặt khác: $\frac{3S}{S-1} = P > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S < 0 \\ S > 1 \end{array}\right.$ (**)

Từ (*), (**) suy ra: $S \in [4;+\infty)$ và hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $m = \frac{S^2 + 2S + 33}{S-1}$ có nghiệm $S \in [4;+\infty)$.

Xét hàm số $f(S) = \frac{S^2 + 2S + 33}{S-1}$, $S \in [4;+\infty)$.

Ta có: $f'(S) = \frac{S^2 - 2S - 35}{(S-1)^2} = 0 \Leftrightarrow S = 7 \in [4;+\infty)$.

BBT: $\lim\limits_{S \to +\infty} f(S) = +\infty$.

S	4		7		$+\infty$
f'(S)	||	−	0	+	
f(S)	19	↘	16	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq 16$.

<u>Bài tập 1:</u> Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x;y)$ với $x > 0,\ y > 0$:

$$\begin{cases} x + y = 4xy \\ x^2 + y^2 - 7xy = m \end{cases}.$$

Bài giải:

Đặt $S = x + y,\ P = xy$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S = 4P \\ S^2 - 9P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 4P \\ 16P^2 - 9P = m \end{cases} \text{ (I)}$$

Theo định lí Viet, ta có $x,\ y$ là hai nghiệm thuộc $(0;1]$ của phương trình: $t^2 - 4Pt + P = 0$.

Trước hết ta tìm P để phương trình $t^2 - 4Pt + P = 0$ có hai nghiệm thuộc $(0;1]$.

Yêu cầu tương đương tìm P để phương trình $P = \frac{t^2}{4t-1}$ có hai nghiệm thuộc $(0;1]$ (vì $t = \frac{1}{4}$ không là nghiệm)

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2}{4t-1},\ t\in\left(0;1\right]$. Ta có: $f'\left(t\right)=\dfrac{2t\left(2t-1\right)}{\left(4t-1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

BBT: $\lim\limits_{t\to\frac{1}{4}^-}f\left(t\right)=-\infty;\ \lim\limits_{t\to\frac{1}{4}^+}f\left(t\right)=+\infty$

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
f'(t)	‖	−	‖	−	0	+	‖
f(t)	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $P=\dfrac{t^2}{4t-1}$ có hai nghiệm thuộc $\left(0;1\right]$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{4}\le P\le\dfrac{1}{3}$.

+ Hệ phương trình (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $16P^2-9P=m$ có nghiệm $P\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

Xét hàm số $g\left(P\right)=16P^2-9P,\ P\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$. Ta có: $g'\left(P\right)=32P-9=0\Leftrightarrow P=\dfrac{9}{32}$.

BBT:

P	$\frac{1}{4}$		$\frac{9}{32}$		$\frac{1}{3}$
g'(P)	‖	−	0	+	‖
g(P)	$\frac{-5}{4}$	↘	$\frac{-81}{64}$	↗	$\frac{-11}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm thoả yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow-\dfrac{81}{64}\le m\le-\dfrac{11}{9}$.

Bài tập 3: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}x^2+y^2-5x+4y+8=0\\3x^2-mx\sqrt{x}+16=0\end{cases}$

Bài giải: Điều kiện: $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$.

Phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow y^2 + 4y + x^2 - 5x + 8 = 0$.

Xem phương trình này là phương trình bậc hai theo ẩn y, khi đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[1;4\right]$.

Từ đó suy ra, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0$ (1) có nghiệm $x \in \left[1;4\right]$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t \in \left[1;2\right]$, phương trình (1) trở thành:

$$3t^4 - mt^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow m = 3t + \frac{16}{t^3},\ t \in \left[1;4\right].$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = 3t + \dfrac{16}{t^3},\ t \in \left[1;4\right] \Rightarrow f^/\left(t\right) = 3 - \dfrac{48}{t^4} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in \left[1;4\right]$.

BBT:

t	1		2
f'(t)	||	–	0 ||
f(t)	19	↘	8

Dựa vào bảng biến thiên, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 8 \leq m \leq 19$.

<u>Bài tập 3:</u> (HSG Hà Tĩnh 2013) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - m = y\left(x + my\right) \\ x^2 - y = xy \end{cases}$$

Bài giải: Điều kiện: $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} my^2 - y + m = 0 & (1) \\ x^2 - yx - y = 0 & (2) \end{cases}$.

Xem phương trình (2) là phương trình bậc hai theo biến x, có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = y^2 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left(-\infty;-4\right] \cup \left[0;+\infty\right)$.

Do đó, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $y \in \left(-\infty;-4\right] \cup \left[0;+\infty\right)$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow m = \dfrac{y}{y^2 + 1},\ y \in \left(-\infty;-4\right] \cup \left[0;+\infty\right)$.

Xét hàm số $f\left(y\right)=\dfrac{y}{y^2+1}$, $y\in\left(-\infty;-4\right]\cup\left[0;+\infty\right)$

$\Rightarrow f^/\left(y\right)=\dfrac{1-y^2}{\left(y^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow y=1\in\left(-\infty;-4\right]\cup\left[0;+\infty\right).$

BBT: $\lim\limits_{y\to+\infty}f\left(y\right)=0;\ \lim\limits_{y\to-\infty}f\left(y\right)=0$

y	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
f'(y)		$-$		//////		$+$	0	$-$	
f(y)	0	↘	$-\dfrac{4}{17}$	//////	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{4}{17}\le m\le\dfrac{1}{2}$.

<u>Bài tập 4:</u> (HSG Nghệ An 2006) Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases}x+y=m\\ \left(y+1\right)x^2+xy=m\left(x+1\right)\end{cases}$$

Bài giải: Điều kiện: $x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}y=m-x & (1)\\ x^3-mx^2+m=0 & (2)\end{cases}$.

Vì $y=m-x$ nên hệ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

(2) $\Leftrightarrow x^3=m\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (do $x=1;\ x=-1$ không thoả mãn (2))

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ trên tập xác định.

Ta có: $f^/\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\sqrt{3}\vee x=-\sqrt{3}.$

BBT: $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty;\lim\limits_{x\to-1^+}f\left(x\right)=+\infty;\lim\limits_{x\to-1^-}f\left(x\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=+\infty;\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=-\infty$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	||	−	0	−	||	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

<u>Bài tập 4:</u> Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$

Bài giải: Điều kiện: $x \in [-1;1]$; $y \in [0;2]$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^3 - 3(x+1)^2 = y^3 - 3y^2$ (3)

Vì $x \in [-1;1] \Rightarrow x + 1 \in [0;2]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2,\ t \in [0;2] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t < 0,\ \forall t \in (0;2)$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0;2]$. Phương trình (3) có dạng: $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x + 1$

Thay vào phương trình (2) ta được: $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0,\ x \in [-1;1]$ (4)

Đặt $u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \forall x \in [-1;1] \Rightarrow u \in [0;1]$, phương trình (4) trở thành: $u^2 + 2u - 1 = m$ (5)

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (5) có nghiệm $u \in [0;1]$.

Xét hàm số $g(u) = u^2 + 2u - 1,\ u \in [0;1] \Rightarrow g'(u) = 2u + 2 > 0,\ \forall u \in [0;1]$.

BBT:

u	0		1
g'(u)		+	
g(u)	-1	↗	2

Dựa vào bảng biến thiên, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le m \le 2$.

Bài tập 5: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 4x^3 - 3x + (y-1)\sqrt{2y+1} & (1) \\ 2x^2 + x + \sqrt{-y(2y+1)} + m^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Bài giải: Điều kiện: $y \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (-2x)^3 - 3(-2x) = \left(\sqrt{2y+1}\right)^3 - 3\sqrt{2y+1}$ (3)

Vì $y \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \Rightarrow \sqrt{2y+1} \in [0;1]$. Từ (2) suy ra $2x^2 + x \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \Rightarrow -2x \in [0;1]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t,\ t \in [0;1] \Rightarrow f^{/}(t) = 3t^2 - 3 < 0,\ \forall t \in (0;1)$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$. Phương trình (3) có dạng:

$f(-2x) = f\left(\sqrt{2y+1}\right) \Leftrightarrow -2x = \sqrt{2y+1}$

Thay vào phương trình (2) ta được: $2x^2 + x + \sqrt{2x^2 - 8x^4} = -m^2,\ x \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$ (4)

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (4) có nghiệm $x \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$.

Ta thấy: $\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{2x^2 - 8x^4} \ge 0,\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \\ -m^2 \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{2x^2 - 8x^4} = 0 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = 0 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m = 0$.

Nhận xét: *Trong trường hợp VP (4) chưa biết dấu thì ta khảo sát* $f(x) = 2x^2 + x + \sqrt{2x^2 - 8x^4}$ *trên* $\left[-\frac{1}{2};0\right]$. *Điều này, không hề đơn giản!*

Bài tập 4: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2(1+y^2) + y^2(1+x^2) = m\sqrt{xy} & (1) \\ x^2y\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} = x^2y - x & (2) \end{cases}$

Bài giải: Điều kiện: $xy \ge 0$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x - \sqrt{1+x^2} = x^2y\left(1 - \sqrt{1+y^2}\right)$ (3)

Ta thấy $x=0$ không thoả mãn (3). Mặt khác, vì $x-\sqrt{1+x^2}<0$ và $1-\sqrt{1+y^2}<0$ nên từ (3) suy ra $y>0$. Kết hợp điều kiện suy ra $x>0$.

Khi đó (3) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=y-y\sqrt{1+y^2}$ (4)

Xét hàm số

$$f(t)=t-t\sqrt{1+t^2},\ t\in(0;+\infty)\Rightarrow f'(t)=1-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}-\sqrt{1+t^2}<0,\ \forall t\in(0;+\infty)$$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Phương trình (4) có dạng: $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(y)\Leftrightarrow \frac{1}{x}=y\Leftrightarrow xy=1$

Thay vào phương trình (1) ta được: $x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}(1+x^2)=m\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=m-2$

Ta có $x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2,\ \forall x>0$ suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m-2\geq 2\Leftrightarrow m\geq 4$.

<u>Bài tập 4:</u> Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}(x+y)xy=x^2+y^2-xy & (1)\\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=m^2 & (2)\end{cases}$

Bài giải: Điều kiện: $xy\neq 0$.

Ta có: $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=m^2\Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=m^2\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3}=m^2$

Thay (1) vào ta được: $\frac{(x+y)^2xy}{x^3y^3}=m^2\Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2=m^2$ (3)

Đặt $t=x+y$, khi đó từ (1) ta có: $xyt=t^2-3xy\Leftrightarrow xy(t+3)=t^2$ và $xy\neq 0,\ t\neq 0,$

$t+3\neq 0$ nên $xy=\frac{t^2}{t+3}\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{t^2}{4}\Rightarrow\frac{t^2}{t+3}\leq\frac{t^2}{4}\Leftrightarrow\frac{t-1}{t+3}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\geq 1\\ t<-3\end{array}\right.$.

Mặt khác: $\frac{x+y}{xy}=\frac{t+3}{t}$, phương trình (3) trở thành: $\left(\frac{t+3}{t}\right)^2=m^2$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t+3}{t}$ trên $(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$.

$\Rightarrow f'(t)=\frac{-3}{t^2}<0,\forall t\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$

BBT:

t	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'(t)		$-$	‖	‖	‖	$-$	
f(t)	1	↘ 0	‖	‖	4	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m^2 < 1 \\ -1 < m^2 \le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left[-2;2\right] \setminus \left\{-1,0,1\right\}$.

<u>Bài tập 4:</u> Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 & (1) \\ x^3 - 3x - 3xy = a + 2 & (2) \end{cases}$

Bài giải: Điều kiện: $y \ge -1$.

Đặt $z = \sqrt{y+1} \ge 0$, hệ trở thành: $\begin{cases} x^2 z - 2xz^2 = 1 \\ x^3 - 3xz^2 = a + 2 \end{cases}$

Ta thấy $z = 0$ không thoả mãn hệ.

Với $z > 0$, đặt $x = tz$ hệ trở thành: $\begin{cases} z^3\left(t^2 - 2t\right) = 1 & (1) \\ z^3\left(t^3 - 3t\right) = a + 2 & (2) \end{cases}$

Do $z > 0$ nên từ (1) suy ra $t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 0 \\ t > 2 \end{array}\right.$.

Từ hệ (1), (2) ta có: $a + 2 = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2}$, $t \in \left(-\infty;0\right) \cup \left(2;+\infty\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2}$, $t \in \left(-\infty;0\right) \cup \left(2;+\infty\right)$.

$\Rightarrow f'\left(t\right) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{\left(t-2\right)^2} = 0 \Rightarrow t = 3 \in \left(-\infty;0\right) \cup \left(2;+\infty\right)$.

BBT: $\lim\limits_{t \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$; $\lim\limits_{t \to -\infty} f\left(x\right) = -\infty$; $\lim\limits_{t \to 2^+} f\left(x\right) = +\infty$.

t	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$				$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$		$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+2 \geq 6 \\ a+2 < \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 4 \\ a < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bài tập 4: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x;y)$ thoả mãn $x \geq 1;\ y \geq 1$:

$$\begin{cases} x+y+4 = 2xy & (1) \\ 2^{x+y} = m\left(\sqrt{x^2+x+y^2+y+5}+x+y\right) & (2) \end{cases}$$

Bài giải: Điều kiện: $x;\ y \in \mathbb{R}$.

Do $x \geq 1;\ y \geq 1$, ta có: $(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy-(x+y)+1 \geq 0$

Từ (1)$\Rightarrow x+y+4-2(x+y)+2 \geq 0 \Leftrightarrow x+y \leq 6$.

Mặt khác, từ (1): $x+y+4 = 2xy \leq \frac{1}{2}(x+y)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y)^2-(x+y)-4 \geq 0$

$\Rightarrow x+y \geq 4$ do $x \geq 1;\ y \geq 1$. Vậy $x+y \in [4;6]$.

Đặt $t = x+y \Rightarrow t \in [4;6]$.

Khi đó, (2) trở thành: $2^t = m\left(\sqrt{t^2+1}+t\right) \Leftrightarrow 2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right) = m$, (do $\sqrt{t^2+1}-t>0$, $\forall t \in [4;6]$).

Xét hàm số $f(t) = 2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right),\ t \in [4;6]$.

$\Rightarrow f'(t) = 2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)\left(\ln 2-\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) > 0,\ \forall t \in [4;6]$

$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{t\in[4;6]} f(t) = f(6) = 64\left(\sqrt{37}-6\right) \\ \min\limits_{t\in[4;6]} f(t) = f(4) = 16\left(\sqrt{17}-4\right) \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 16\left(\sqrt{17}-4\right) \leq m \leq 64\left(\sqrt{37}-6\right)$.

III- MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG TỪ 2002 - 2016:

Đề 01: **(D- 2004)** Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases}$

Bài giải: Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Đặt $u=\sqrt{x},\ v=\sqrt{y}\ \left(u\ge 0,\ v\ge 0\right)$. Hệ trở thành $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=1-3m \end{cases}$ (*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=m \end{cases} \Leftrightarrow u,\ v$ là hai nghiệm của phương trình $t^2-t+m=0$ (**)

Hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)\Leftrightarrow$ Hệ (*) có nghiệm $u\ge 0,\ v\ge 0 \Leftrightarrow$Phương trình (**) có hai nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=1-4m\ge 0 \\ S=1>0 \\ P=m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le \frac{1}{4}$.

Đề 02: **(D- 2006)** CMR: $\forall a>0$, hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm:

$$\begin{cases} e^x-e^y=\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1+y\right) \\ y-x=a \end{cases}$$

Bài giải: Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ y>-1 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} e^{x+a}-e^x+\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1+a+x\right)=0 & (1) \\ y=x+a & (2) \end{cases}$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi chỉ khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất trên $\left(-1;+\infty\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=e^{x+a}-e^x+\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1+a+x\right)\quad \left(x>-1\right)$.

Do $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-1;+\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to -1^+} f\left(x\right)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=+\infty$ nên phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm trên $\left(-1;+\infty\right)$.

Mặt khác:

$$f'\left(x\right)=e^{x+a}-e^x+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+a+x}=e^x\left(e^a-1\right)+\frac{a}{\left(1+x\right)\left(1+a+x\right)}>0,\ \forall x>-1.$$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;+\infty\right)$. Suy ra $f\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất trên $\left(-1;+\infty\right)$.

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (đ.p.c.m).

Đề 03: **(D - 2007)** Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$$

Bài giải: Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{x};\ v=y+\dfrac{1}{y}\ \left(|u|\geq 2;|v|\geq 2\right)$.

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u+v=5 \\ u^3+v^3-3\left(u+v\right)=15m-10 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=8-m \end{cases}$.

Suy ra $u,\ v$ là nghiệm của phương trình $t^2-5t+8-m=0\Leftrightarrow t^2-5t+8=m$ (1).

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn $\left|t_1\right|\geq 2,\ \left|t_2\right|\geq 2$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2-5t+8\ \left(|t|\geq 2\right)$.

Xét bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$5/2$		$+\infty$
f'(t)		–		//////		–	0	+	
f(t)	$+\infty$	↘	22	//////	2	↘	$7/4$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị cần tìm của m là $m\in\left[\dfrac{7}{4};2\right]\cup\left[22;+\infty\right)$.

Đề 04: **(ĐH-D-2011)** Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^3-\left(y+2\right)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$$

Bài giải: Điều kiện: $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-x\right)\left(2x-y\right)=m \\ \left(x^2-x\right)+\left(2x-y\right)=1-2m \end{cases}$. Đặt $u=x^2-x\geq -\dfrac{1}{4};\ v=2x-y$.

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} uv = m \\ u + v = 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (2m-1)u + m = 0 \;\; (1) \\ v = 1 - 2m - u \end{cases}$

Hệ có nghiệm khi chỉ khi phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm $u \geq -\frac{1}{4}$.

Với $u \geq -\frac{1}{4}$; $(1) \Leftrightarrow m(2u+1) = -u^2 + u \Leftrightarrow m = \frac{-u^2 + u}{2u+1}$.

Xét $f(u) = \frac{-u^2+u}{2u+1}$, $u \geq -\frac{1}{4}$. Ta có $f'(u) = -\frac{2u^2+2u-1}{(2u+1)^2}$; $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên:

u	$-\frac{1}{4}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(u)$		+	0	−	
$f(u)$	$-\frac{5}{8}$	↗	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$

Suy ra giá trị cần tìm là $m \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

<u>Đề 05:</u> (Khối A- 2008) Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$$

Bài giải: TXĐ: $D = [0;6]$

Đặt vế trái của phương trình là $f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} \quad (x \in [0;6])$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}\right); \; (x \in (0;6))$$

Đặt $u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}$; $v(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}$.

Ta thấy $u(2)=v(2)=0 \Rightarrow f'(2)=0$. Hơn nữa $u(x),\ v(x)$ cùng dương trên $(0;2)$ và cùng âm trên khoảng $(2;6)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		6
f'(x)	||	+	0	–	||
f(x)	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	↗	$3\sqrt{2}+6$	↘	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Suy ra các giá trị m cần tìm là: $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m < 3\sqrt{2}+6$.

Giải thích cụ thể hơn: $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)\quad \left(x\in(0;6)\right)$

Đặt $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}>0;\ b=\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$, ta có $\frac{1}{2}\left(a^3-b^3\right)+\left(a^2-b^2\right)=(a-b)\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(a^2+ab+b^2\right)+a+b}_{>0}\right]$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}.\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right]$$

Do đó ta chỉ cần xét dấu $\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$.

<u>Đề 06:</u> (Dự bị- 2007) Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$ có nghiệm.

Bài giải: Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4-13x+m}=1-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^4-13x+m=(1-x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ 4x^3-6x^2-9x=1-m \end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=1-m$ cắt phần đồ thị $f(x)=4x^3-6x^2-9x$; $(x\le 1)$ tại ít nhất một giao điểm.

Ta có: $f(x)=4x^3-6x^2-9x$; $(x\le 1)\Rightarrow f'(x)=12x^2-12x-9=3\left(4x^2-4x-3\right)$

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\vee x=\frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
f'(x)		+	0	−	||
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	−11 ||

Từ bảng biến thiên ta có, ycbt $\Leftrightarrow 1-m\le \frac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge -\frac{3}{2}$.

<u>Đề 07:</u> (Dự bị- 2007) Tìm m để phương trình: $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$ có đúng 2 nghiệm.

Bài giải: TXĐ: $D=\left[4;+\infty\right)$

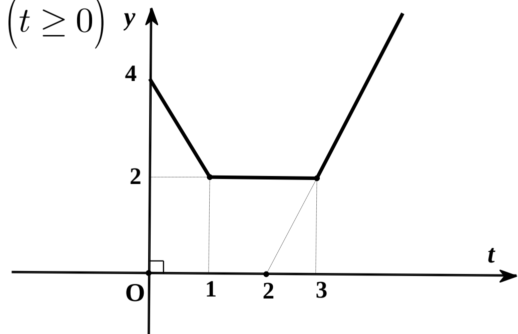
Phương trình cho $\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-4\right)-2\sqrt{x-4}+1}+\sqrt{\left(x-4\right)-6\sqrt{x-4}+9}=m$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-3\right)^2}=m\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-4}-1\right|+\left|\sqrt{x-4}-3\right|=m$ (1)

Đặt: $t=\sqrt{x-4}\ge 0$, (1) trở thành: $\left|t-1\right|+\left|t-3\right|=m$ (2)

Phương trình cho có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng 2 nghiệm $t\ge 0$.

<u>Cách 1:</u> Vẽ đồ thị của hàm số $f\left(t\right)=\left|t-1\right|+\left|t-3\right|$ $\left(t\ge 0\right)$



Ta có $f\left(t\right)=\begin{cases}4-2t & \text{nếu } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{nếu } 1\le t\le 3\\ 2t-4 & \text{nếu } t\ge 3\end{cases}$

Từ đồ thị ta có, ycbt $\Leftrightarrow 2<m\le 4$.

<u>Cách 2:</u>

$\Leftrightarrow \left|t-1\right|+\left|t-3\right|=m\ \left(t\ge 0\right)\Leftrightarrow \begin{cases}0\le t<1\\ m=4-2t\end{cases}$ hay $\begin{cases}1\le t\le 3\\ m=2\end{cases}$ hay $\begin{cases}t>3\\ m=2t-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le t<1\\ 2<m\le 4\\ t=\frac{4-m}{2}\end{cases}$ hay $\begin{cases}1\le t\le 3\\ m=2\end{cases}$ hay $\begin{cases}t>3\\ m>2\\ t=\frac{4+m}{2}\end{cases}$. Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2<m\le 4$

(khi $2<m\le 4$ thì (2) có đúng 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa $0\le t_1<1$ và $t_2>3$)

<u>Đề 08:</u> (Dự bị- 2007) Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm.

Bài giải: TXĐ: $D=\left[0;+\infty\right)$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$; $x\in\left[0;+\infty\right)$.

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<0,\ \forall x>0.\ \text{Vì}\ \frac{x}{\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}}<\frac{x}{\sqrt[4]{x^6}}=\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ta có $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[0;+\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ nên ta có $0<f(x)\le 1,\ \forall x\in\left[0;+\infty\right)$.

Vậy, phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ m thuộc miền giá trị của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$

$$\Leftrightarrow 0<m\le 1.$$

<u>Đề 09:</u> (Khối A- 2007) Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$$

Bài giải: TXĐ: $D=\left[1;+\infty\right)$. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=m$ (1)

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, khi đó (1) trở thành: $-3t^2+2t=m$ (2)

Vì $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}}$ và $x\ge 1$ nên $0\le t<1$

(*Hoặc sử dụng đạo hàm với* $t^4=\frac{x-1}{x+1},\ t\ge 0,\ x\ge 1$)

Hàm số $f\left(t\right)=-3t^2+2t$ $\left(0\le t<1\right)$ có bảng biến thiên:

t	0	1/3	1
f(t)	0 ↗	1/3	↘ -1

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $t\in\left[0;1\right)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có các giá trị m cần tìm là: $-1<m\le\frac{1}{3}$.

<u>Đề 10:</u> (Khối B- 2007) Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau luôn có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2+2x-8=\sqrt{m\left(x-2\right)}$

Bài giải: Theo giả thiết $m>0$, ta có điều kiện của phương trình là $x\ge 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x-2\right)\left(x^3+6x^2-32-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+6x^2-32-m=0 \end{array}\right.$$

Ta chứng minh phương trình $x^3+6x^2-32=m$ (1) có một nghiệm thuộc $\left(2;+\infty\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3+6x^2-32\ \left(x>2\right) \Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2+12x>0\ \forall x>2$.

Bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, với $m>0$ phương trình (1) luôn có nghiệm thuộc $\left(2;+\infty\right)$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

<u>Đề 11:</u> (Dự bị- 2007) Tìm m để phương trình: $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$

Bài giải: TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}\ge 0 \Leftrightarrow t^2-2=x^2-2x$

Bất phương trình $\Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2-2}{t+1}\quad \left(1\le t\le 2\right)$, do $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$

Khảo sát $g(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $\left(1\le t\le 2\right)$

Ta có: $g'\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0$. Vậy $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[1;2\right]$.

Do đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Bất phương trình $m\le\dfrac{t^2-2}{t+1}$ có nghiệm $t\in\left[1;2\right]$

$$\Leftrightarrow m\le \max_{[1;2]} g\left(t\right)=g\left(2\right)=\frac{2}{3}.$$

<u>Đề 12:</u> (Khối B- 2006) Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1\ (1)$$

Bài giải:

Ta có: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ x^2+mx+2=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 3x^2-(m-4)x-1=0 \ (2) \end{cases}$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $-\frac{1}{2} \le x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-4)^2+12>0\ \forall m \\ \frac{S}{2}=\frac{m-4}{6}>-\frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{m-4}{2}-1 \ge 0 \text{ với } f(x)=3x^2-(m-4)x-1 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{9}{2}$$

Cách khác: Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $-\frac{1}{2} \le x_1 < x_2$

Ta có: $3x^2-1=(m-4)x \Leftrightarrow m-4=\frac{3x^2-1}{x}=g(x)\ \left(x \ge -\frac{1}{2}\right)$

Tiến hành khảo sát $y=g(x)\ \left(x \ge -\frac{1}{2}\right)$, dựa vào bảng biến thiên và đưa ra kết luận.

Đề 13: (Dự bị- 2004) Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^2+\left(m^2-\frac{5}{3}\right)\sqrt{x^2+4}+2-m^2=0$$

Bài giải: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt $\sqrt{x^2+4}=t \ge 2$.

Phương trình đã cho tương đương với: $t^2-4+\left(m^2-\frac{5}{3}\right)t+2-m^2=0$

$\Leftrightarrow 3t^2+(3m^2-5)t-6-3m^2=0 \Leftrightarrow 3t^2-5t-6=3m^2(1-t) \Leftrightarrow 3m^2=\frac{3t^2-5t-6}{1-t}$

Đặt $f(t)=\frac{3t^2-5t-6}{1-t},\ t \ge 2$. Ta có $f'(t)=\frac{-3t^2+6t-11}{(1-t)^2}<0\ \forall t \ge 2$.

Suy ra $f(t)$ giảm và liên tục trên $[2;+\infty)$, $f(2)=4$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)=-\infty$.

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $3m^2 \le 4 \Leftrightarrow |m| \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Đề 14: **(Khối B- 2004)** Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$$

Bài giải: TXĐ: $D=\left[-1;1\right]$

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$. Do $\sqrt{1+x^2}\geq\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t\geq 0;\ t=0\Leftrightarrow x=0$.

$t^2=2-2\sqrt{1-x^4}\leq 2\Rightarrow t\leq\sqrt{2},\ t=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$.

Suy ra: $\forall x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ liên tục trên $\left[-1;1\right]$.

Phương trình đã cho trở thành $m\left(t+2\right)=-t^2+t+2\Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ (*)

Xét $f\left(t\right)=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}\quad\left(t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\right)$. Ta có $f\left(t\right)$ liên tục trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

$$\Leftrightarrow\min_{\left[0;\sqrt{2}\right]}f\left(t\right)\leq m\leq\max_{\left[0;\sqrt{2}\right]}f\left(t\right)$$

Ta có: $f'\left(t\right)=\dfrac{-t^2-4t}{\left(t+2\right)^2}\leq 0\ \forall t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Rightarrow f\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Suy ra $\min_{\left[0;\sqrt{2}\right]}f\left(t\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1;\ \max_{\left[0;\sqrt{2}\right]}f\left(t\right)=f\left(0\right)=1$.

Vậy các giá trị m cần tìm là: $\sqrt{2}-1\leq m\leq 1$.

III- BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $m\sqrt{x^2+1}=x+2-m$.

Bài 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x^2-x-\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}=m$.

Bài 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)\left(m^2.\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x-2}}-3\sqrt[4]{x\left(x-2\right)}\right)=2$.

Bài 4: Tìm m để phương trình sau có 4nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$:

$\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^4 4x=m$.

Bài 5: Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc $\left(0;1\right)$: $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$.

Bài 6: Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc $\left[32;+\infty\right)$:

$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m\left(\log_2 x - 3\right)$.

Bài 7: Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc $\left(2;4\right)$:

$\left(m-1\right)\log_{\frac{1}{2}}^2\left(x-2\right) - \left(m-5\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(x-2\right) + m - 1 = 0$.

Bài 8: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm: $4^x - m.2^{x+1} + 3 - 2m \le 0$.

Bài 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $4\sqrt{6+x-x^2} - 3x = m\left(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3-x}\right)$.

Bài 10: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x^3 - 4x + \sqrt{x-1} = m$.

Bài 11: Tìm m để pt sau có nghiệm trên $\left[\frac{1}{4};2\right]$: $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 3m = 0$

Bài 12: Tìm m để pt sau có nghiệm thực: $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$

Bài 13: Tìm m để pt sau có 4 nghiệm thực phân biệt : $4^{x^2-2x} - 2^{x^2-2x+1} - m = 0$

Bài 14: Cho bất hương trình: $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4-x^2} \ge m\,(1)$

a, Tìm m để bpt (1) có nghiệm

b, Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x $\in[1; 2]$.

Bài 15: Cho bất phương trình: $4^{x^2} - m.2^{x^2+1} - m \ge 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$

Bài 16: Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x sao cho $\left|x\right| > \frac{1}{2}$

$$9^{2x^2-x} - 2(m-1)6^{2x^2-x} + (m+1)4^{2x^2-x} \ge 0$$

Bài 17: Tìm a để pt sau có nghiệm: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = 2a$

Bài 18: Tìm m để pt có đúng 2 nghiệm thực phân biệt: $\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$

Bài 19: Tìm m để pt sau có nghiệm: $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x + m = 0$

Bài 20: Tìm m để pt sau có nghiệm $x \in (0;\frac{\pi}{2})$:

$$\sin x+\cos x+1+\frac{1}{2}(\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x})=m$$

Bài 21: Tìm m để pt sau có nghiệm thuộc (0; 1): $4\log_2^2\sqrt{x}-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$

Bài 22: Tìm m để bpt có nghiệm: $4^x-m2^x-m+3\le 0$.

Bài 23: Tìm m để bpt sau nghiệm đúng với mọi x $\in R$: $\sin^6 x+\cos^6 x+\sin x\cos x\ge m$

Bài 24: Tìm m để bpt nghiệm đúng với $\forall x\in\left[-4;6\right]$: $\sqrt{(4+x)(6-x)}\le x^2-2x+m$

Bài 25: Tìm m để pt sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$

Bài 26: Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, phương trình sau luôn có hai nghiệm thực phân biệt: $\sqrt{m(x-2)}=x^2+2x-8$

Bài 27: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=m\\ x+y=2m+1\end{cases}$.

Bài 28: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}2x-y-m=0\\ x+\sqrt{xy}=1\end{cases}$.

Bài 29: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}x^2+3x-4\le 0\\ x^3-3\left|x\right|x-m=0\end{cases}$

V- TÀI LIỆU THAM KHẢO:

1) **Tuyển tập đề thi ĐH - CĐ toàn quốc**	*Bộ giáo dục và đào tạo*
2) **Phương pháp hàm số trong giải toán**	*TS. Lê Xuân Sơn - ThS. Lê Khánh Hưng*
3) **Tuyển tập đề thi thử ĐH trên toàn quốc**	
4) **Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**	*NXB Giáo dục Việt Nam*

P/S: *Các bài tập trong tài liệu chưa nhận được sự cho phép của quí thầy cô và các cơ quan liên quan, nhưng tài liệu biên soạn chỉ với mục đích chia sẽ cho đồng nghiệp và tặng cho các em học sinh có nguồn tư liệu quí để phục vụ khả năng tự học nên chúng tôi xin phép các tác giả, xin cảm ơn các tác giả!*

Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi sai sót, kính mong quí thầy cô và các em học sinh đóng góp để các bản update tiếp theo được hoàn thiện hơn! Xin chân thành cám ơn!

CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

Phụ trách chung: **Giáo viên LÊ BÁ BẢO.**

Đơn vị công tác: **Trường THPT Phong Điền, Thừa Thiên Huế.**

Email: **beckbo1210@yahoo.com** *Facebook:* **Lê Bá Bảo**

Số điện thoại: **0935.785.115**

